Probabilidad
Clase 2

Gustavo Landfried

Grupo Antropocaos

18 de octubre de 2018

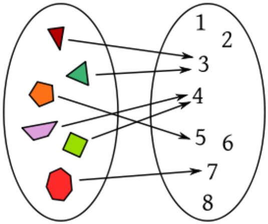
0. Funciones
1. Espacios de probabilidad
2. Probabilidad condicional e independencia
3. Variable aleatoria, esperanza, varianza

Función matemática

Una función matemática es:

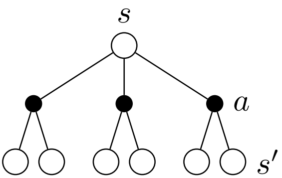
> *una operación f que asigna a cada elemento de un conjunto X un único elemento de otro conjunto Y.*

$$f(x) = y \tag{1}$$



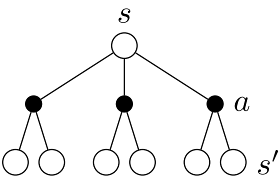
$$x \quad \xmapsto{f} \quad y$$

Libre albedrío



s: estados, a: acciones

Libre albedrío



s: estados, a: acciones

No existe una función tal que

$$f(s) = a$$

Función de probabilidad

Sí existen funciónes de probabilidad tal que

$$P : \underbrace{\text{Acciones} \times \text{Estados}}_{\text{Dominio: Espacio muestral}} \mapsto \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} P(a_1 \mid s) &= 0{,}20 \\ P(a_2 \mid s) &= 0{,}75 \\ P(a_3 \mid s) &= 0{,}05 \\ P(a_4 \mid s) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Espacio muestral

Conjunto de resultados posibles de un experimento

Ejemplos

- Moneda: $S = \{\text{Cara}, \text{Seca}\}$
- Dado: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 2 monedas: $S = \{(\text{Cara}, \text{Cara}), (\text{Cara}, \text{Seca}), (\text{Seca}, \text{Cara}), (\text{Seca}, \text{Seca})\}$
- Libre albedrío: $S = \{(a_1, s_1), (a_1, s_2), \ldots, (a_n, s_m)\}$

Eventos

Subconjunto del espacio muestral S

Sea $A, B \subset S$ eventos, valen

- Valen las operaciones de conjunto
- $A \cup B$, $A \cap B$, A^C, $B - A$, etc

Conjuntos

Operandos

Union $A \cup B$. Ocurre A o B.

Intersección $A \cap B$. Ocurre A y B.

Complemento A^c. No ocurre A.

Diferencia $A - B = A \cap B^c$. Ocurre A y no ocurre B.

Conjuntos

Operandos

Union $A \cup B$. Ocurre A o B.

Intersección $A \cap B$. Ocurre A y B.

Complemento A^c. No ocurre A.

Diferencia $A - B = A \cap B^c$. Ocurre A y no ocurre B.

Propiedades

Asociatividad $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (lo mismo con $\cap$)

Conmutatividad $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

Distributiva $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Morgan $(\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c$, $(\cap_i A_i)^c = \cup_i A_i^c$

Axiomas de probabilidad

Axiomas

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$
- $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$

Axiomas de probabilidad

Axiomas

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$
- $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$

Propiedades que se demuestran con los axiomas (Ver apunte)

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Ejemplo

	Vacunados	No vacunados	
Enfermos	4	2	6
Sanos	76	18	94
	80	20	100

Ejemplo

	Vacunados	No vacunados	
Enfermos	4	2	6
Sanos	76	18	94
	80	20	100

Espacio muestral: $S = \{ev, en, sv, sn\}$

Eventos: Enfermo,$E = \{ev, en\}$, Vacunado,$V = \{ev, sv\}$

Ejemplo

	Vacunados	No vacunados	
Enfermos	4	2	6
Sanos	76	18	94
	80	20	100

Espacio muestral: $S = \{ev, en, sv, sn\}$

Eventos: Enfermo,$E = \{ev, en\}$, Vacunado,$V = \{ev, sv\}$

Calcular

- $P(\{ev\})$, $P(\{en\})$, $P(\{sv\})$ $P(\{sn\})$
- $P(E)$, $P(V)$
- $P(E|V)$ Si está vacunada, cual es la probabilidad de que esté enferma

Probabilidad condicional

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$$
es la *probabilidad condicional* de A dado que conocemos B

Propiedades (por los axiomas y la definición de proba condicional)

- $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(A, B)$
- $(B, P(\cdot|B))$ Nuevo espacio de probabilidad
- Caso gral $P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_n|A_1, \ldots, A_{n-1}) \ldots P(A_2|A_1)P(A_1)$

Teorema de la probabilidad total

Dado B una partición de S (es decir $B_i \cap B_j = \emptyset$)

Sabemos $P(B_i)$ y $P(A \mid B_i)$

Queremos $P(A)$

$$\underbrace{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)}_{\text{Teorema de la probabilidad total}} \tag{3}$$

Demostración

$$P(A) = P(\cup_i (A \cap B_i)) = \sum_{i=1} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1} P(A \mid B_i) P(B_i) \tag{4}$$

Ejemplo anterior

$$P(E) = P(E|V)P(V) + P(E|V^c)P(V^c)$$

Ejemplo anterior $P(V) = 0,8$, $P(E|V) = 0,02$, $P(E|V^c) = 0,1$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|V)P(V) + P(E|V^c)P(V^c) \\ &= 0,05 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,06 \end{aligned}$$

¿Cuál es la proba de que una persona con gripe haya sido vacunada?

¿Cuál es la proba de que una persona con gripe no haya sido vacunada?

Ejemplo anterior $P(V) = 0,8$, $P(E|V) = 0,02$, $P(E|V^c) = 0,1$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|V)P(V) + P(E|V^c)P(V^c) \\ &= 0,05 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,06 \end{aligned}$$

¿Cuál es la proba de que una persona con gripe haya sido vacunada?

$$P(V|E) = \frac{P(E|V)P(V)}{P(E)} = \frac{0,2 \cdot 0,8}{0,036} = 0,\overline{4}$$

¿Cuál es la proba de que una persona con gripe no haya sido vacunada?

Ejemplo anterior $P(V) = 0,8$, $P(E|V) = 0,02$, $P(E|V^c) = 0,1$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|V)P(V) + P(E|V^c)P(V^c) \\ &= 0,05 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,06 \end{aligned}$$

¿Cuál es la proba de que una persona con gripe haya sido vacunada?

$$P(V|E) = \frac{P(E|V)P(V)}{P(E)} = \frac{0,2 \cdot 0,8}{0,036} = 0,\overline{4}$$

¿Cuál es la proba de que una persona con gripe no haya sido vacunada?

$$P(V^c|E) = \frac{P(E|V^c)P(V^c)}{P(E)} = \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,036} = 0,\overline{5}$$

Teorema de Bayes

$$\overbrace{P(H \mid D)}^{\text{posterior}} = \frac{\overbrace{P(D \mid H)}^{\text{Likelihhod}}\overbrace{P(H)}^{\text{Prior}}}{P(D)}$$

Teorema de Bayes

$$\overbrace{P(H \mid D)}^{\text{posterior}} = \frac{\overbrace{P(D \mid H)}^{\text{Likelihhod}}\overbrace{P(H)}^{\text{Prior}}}{P(D)}$$

Demostración

Sea B partición de S y A evento

Sabemos $P(A|B_i)$ y $P(B_i)$

Queremos $P(B_i \mid A)$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}\frac{P(B_i)}{P(B_i)} = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{P(A)} \quad (5)$$

El juego de las 3 puertas

3 Puertas. Detrás de una hay un premio. El jugador elige y el presentador le abre otra y le ofrece cambiar de puerta. ¿Conviene cambiar?

El juego de las 3 puertas

3 Puertas. Detrás de una hay un premio. El jugador elige y el presentador le abre otra y le ofrece cambiar de puerta. ¿Conviene cambiar?

B_i = premio en puerta i. $P(B_i) = 1/3$

- El jugador elige la puerta 1
- A = el presentador abre la puerta 3

Luego sabemos que: $P(A|B_3) = 0$, $P(A|B_2) = 1$, $P(A|B_1) = 1/2$

El juego de las 3 puertas

3 Puertas. Detrás de una hay un premio. El jugador elige y el presentador le abre otra y le ofrece cambiar de puerta. ¿Conviene cambiar?

B_i = premio en puerta i. $P(B_i) = 1/3$

- El jugador elige la puerta 1
- A = el presentador abre la puerta 3

Luego sabemos que: $P(A|B_3) = 0$, $P(A|B_2) = 1$, $P(A|B_1) = 1/2$

Calcular (Usando bayes y el teorema de la proba total)

- $P(A)$
- $P(B_1|A)$
- $P(B_2|A)$

Independencia

Sea $A, B \subset S$ evento

$$A \text{ y } B \text{ son independientes}$$
$$\Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A)$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplos

- Dos dados: $A =$ suma 6, $B =$ suma 7, $C =$ primer dado 4.

Familia de eventos independientes

Sea $A_1, A_2 \cdots \subset S$ evento

$$\boxed{\begin{array}{c} A_1 \dots A_n \text{ son independientes} \\ \Leftrightarrow P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \end{array}}$$

- Mirar los ejemplos del apunte de probabilidad

Variable aleatoria

Una variable es una función $X : S \to \mathbb{R}$
(induce una partición)

Ejemplo

- $S = \{00, 01, 10, 11\}$, $X =$ número de caras
  $X(00) = 0$, $X(01) = X(10) = 1$, $X(11) = 2$
  Induce $\{X = 0\} = \{00\}$, $\{X = 1\} = \{01, 10\}$, $\{X = 2\} = \{11\}$

Permite calcular

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Esperanza

Esperanza

$$E(X) = \sum_x xP(X = x) \tag{6}$$

Lema. Sea $Y = g(X)$ (Ver demo en apuntes)

$$E(Y) = \sum_x g(x)P(X = x) \tag{7}$$

Propiedades (Esta demostración es tema de parcial)

- $E(aX + b) = aE(X) + b$

Varianza

Dispersión cuadrática alrededor de la media

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \qquad (8)$$

Formula alternativa (Esta demostración es tema de parcial)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \qquad (9)$$

Desvío estandar

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \qquad (10)$$

La próxima clase:

- Combinatoaria