Ciencias sociales computacionales

Práctica 1 – Lógica

Parte 1 – Lógica proposicional

Ejercicio 1

Sean p y q variables proposicionales. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son *fórmulas bien formadas*?

1. $(p \neg q)$
2. $p \vee q \wedge \text{True}$
3. $(p \rightarrow \neg p \rightarrow q)$
4. $\neg(p)$
5. $(p \vee \neg p \wedge q)$
6. $(\text{True} \wedge \text{True} \wedge \text{True} \wedge \ldots$
7. $(\neg p)$
8. $(p \vee \text{False})$
9. $(p = q)$

Ejercicio 2

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a) $(\neg a \vee b)$

b) $((c \vee (y \wedge x)) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

d) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

e) $((c \vee y) \wedge (x \vee b))$

f) $(((c \vee y) \wedge (x \vee b)) \leftrightarrow ((c \vee (y \wedge x)) \vee b))$

g) $(\neg c \wedge \neg y)$

h) $((\neg c \rightarrow x) \wedge (y \vee (c \leftrightarrow \neg a)))$

1. Cuando el valor de verdad de a, b y c es *verdadero*, mientras que el de x e y es *falso*.
2. Cuando el valor de verdad de a, b y c es *falso*, mientras que el de x e y es *verdadero*.

Ejercicio 3

Determine, utilizando tablas de verdad, si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \vee \neg p)$

b) $(p \wedge \neg p)$

c) $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$

d) $((p \vee q) \rightarrow p)$

e) $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$

f) $(\neg p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$

g) $(p \rightarrow p)$

h) $((p \wedge q) \rightarrow p)$

i) $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$

j) $((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$

Ejercicio 4

Decimos que un conectivo es *expresable* mediante otros si es posible escribir una fórmula utilizando exclusivamente estos últimos y que tenga la misma tabla de verdad que el primero (es decir, son equivalentes). Por ejemplo, la disyunción es expresable mediante la conjunción más la negación, ya que $(p \vee q)$ tiene la misma tabla de verdad que $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.

Muestre que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (implicación), $\leftrightarrow$ (equivalencia) puede escribirse utilizando solo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

Ejercicio 5

Sean las variables proposicionales f, e y m con los siguientes significados:

$f \equiv$"es fin de semana" $\quad e \equiv$"Juan estudia" $\quad m \equiv$"Juan escucha música"

1. Escribir usando lógica proposicional las siguientes oraciones:
   - "Si es fin de semana, Juan estudia o escucha música, pero no ambas cosas"
   - "Si no es fin de semana entonces Juan no estudia"
   - "Cuando Juan estudia los fines de semana, lo hace escuchando música"
2. Asumiendo que valen las tres proposiciones anteriores ¿se puede deducir que Juan no estudia? Justificar usando argumentos de la lógica proposicional.

Parte 2 – Semántica de cortocircuito

Ejercicio 6

Asigne un valor de verdad (*verdadero*, *falso* o *indefinido*) a cada una de las siguientes expresiones lógicas, sabiendo que la proposición p es *verdadera*, mientras que q es *falsa* y r está *indefinida*.

a) $((9 \leq 9) \wedge p)$

b) $((3 \leq 2) \rightarrow (p \wedge q))$

c) $((3 < 4) \rightarrow ((3 \leq 4) \vee r)$

d) $((3 > 9) \vee (r \wedge (q \wedge p)))$

e) $((p \wedge q) \wedge r)$

f) $((p \vee q) \vee r)$

g) $((p \wedge r) \wedge ((q \rightarrow p) \vee (p \rightarrow (q \wedge r)))$

h) $((p \wedge \neg q) \rightarrow (1 = 0))$

i) $(p \wedge ((5 - 7 + 3 = 0) \leftrightarrow (2^2 - 1 > 3)))$

j) $(\neg(p \vee r) \rightarrow r)$

k) $((p \rightarrow (1 > \log_2 0)) \leftrightarrow (2^2 = 4 \wedge (p \wedge \neg q)))$

l) $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$

Ejercicio 7

Las siguientes son reglas de simplificación para la lógica proposicional clásica (i.e. aquella en que las variables sólo pueden ser *verdaderas* o *falsas*).

$\text{False} \wedge \alpha \equiv \text{False}$	False es absorbente para $\wedge$	$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$	Ley de doble negación
$\text{True} \wedge \alpha \equiv \alpha$	Identidad de $\wedge$	$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$	Conmutatividad de $\wedge$
$\text{False} \vee \alpha \equiv \alpha$	Identidad de $\vee$	$\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$	Conmutatividad de $\vee$
$\text{True} \vee \alpha \equiv \text{True}$	True es absorbente para $\vee$	$\gamma \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	Distributividad de $\wedge$
$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$	Idempotencia para $\wedge$	$\gamma \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv (\gamma \vee \alpha) \wedge (\gamma \vee \beta)$	Distributividad de $\vee$
$\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$	Idempotencia para $\vee$	$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$	Ley de De Morgan
$\alpha \vee \neg\alpha \equiv \text{True}$	Tautología	$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$	Ley de De Morgan
$\alpha \wedge \neg\alpha \equiv \text{False}$	Ley de contradicción	$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$	Equivalencia del $\rightarrow$

1. Suponiendo que p y q no se encuentran indefinidas, simplificar las siguientes fórmulas:

   a) $(p \wedge p \wedge p)$

   b) $((p \wedge (\neg p \vee q)) \vee q \vee (p \wedge (p \vee q)))$

   c) $(\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$

   d) $(\neg((\neg(p \wedge q) \vee p \vee q) \rightarrow (\neg\neg p \vee \neg p)))$

   e) $(((p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)) \rightarrow q)$

Nota: puede suceder que para reducir algunas expresiones sea necesario utilizar una tautología del tipo $\alpha \leftrightarrow \beta$ que no figure entre las reglas de simplificación propuestas. En ese caso, la validez de la tautología debe ser probada mediante tablas de verdad.

2. ¿Cuáles de las reglas de simplificación anteriores siguen valiendo cuando admitimos que α, β y γ puedan indefinirse?

Parte 3 – Lógica de primer orden

Ejercicio 8

Sabiendo que $P(x)$ y $Q(x)$ son predicados unarios de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $R(x, y)$ es un predicado binario de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, indicar en las siguientes fórmulas cuáles son *variables libres* y cuáles *ligadas*.

a) $P(x)$

b) $(\forall y : \mathbb{Z})P(y)$

c) $(\forall x : \mathbb{Z})P(y)$

d) $(P(x) \vee (\exists x : \mathbb{Z})P(x))$

e) $(\exists x : \mathbb{Z})(P(x) \to Q(x))$

f) $R(x, y)$

g) $(P(x) \vee (\exists x : \mathbb{Z})R(x, y)) \vee Q(x)$

h) $(\exists x : \mathbb{Z})(\forall y : \mathbb{Z})R(x, y)$

i) $(\forall x : \mathbb{Z})(P(x) \wedge Q(x))$

j) $(\forall x : \mathbb{Z})(P(y) \wedge Q(x))$

k) $(\forall z : \mathbb{Z})(P(z) \to ((\exists x : \mathbb{Z})(P(x) \wedge R(x, z))))$

l) $(\forall z : \mathbb{Z})(P(z) \to ((\exists x : \mathbb{Z})(P(z) \wedge R(x, z))))$

Ejercicio 9

Dadas $w, x, y, z : \mathbb{Z}$ y sabiendo que $w = 0$, $x = 1$, $y = 3$ y $z = 4$, determinar el valor de verdad de las siguientes fórmulas en $\mathbb{Z}$.

a) $x = y$

b) $x + y = z$

c) $(\forall x : \mathbb{Z})(\exists y : \mathbb{Z})(x = y)$

d) $(\exists y : \mathbb{Z})(\forall x : \mathbb{Z})(x = y)$

e) $(\forall x : \mathbb{Z})(x \geq y \to x \geq z)$

f) $(\exists i : \mathbb{Z})(x \leq i \vee i \leq y)$

g) $(\exists i : \mathbb{Z})(y \leq i \vee i \leq x)$

h) $(\forall i : \mathbb{Z})(x \leq i \vee i \leq y)$

i) $(\forall i : \mathbb{Z})(x \leq i \vee x = 0)$

Ejercicio 10

Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes fórmulas. Cuando alguna no sea verdadera, encontrar valores para las variables que la hagan falsa o la indefinan, cuando sea posible.

a) $(\forall x : \mathbb{R})(\exists y : \mathbb{R})(x \leq y)$

b) $(\exists x : \mathbb{R})(\forall y : \mathbb{R})(x \leq y)$

c) $(\forall y : \mathbb{R})(\forall x : \mathbb{R})(x \leq y)$

d) $(\forall x : \mathbb{R})(x \leq y)$

e) $(\exists x : \mathbb{R})(x = y)$

f) $(\forall x : \mathbb{R})(x = y)$

g) $(\forall x, y : \mathbb{R})(y = 0 \vee (\exists z : \mathbb{R})(x/y = z))$

h) $(\forall x, y : \mathbb{R})(\exists z : \mathbb{R})(x \cdot y = z)$

i) $(\forall x, y : \mathbb{R})(\exists z : \mathbb{R})(x \cdot z = y)$

j) $(\forall x, y : \mathbb{R})(x \leq y \vee y \leq x)$

k) $(\forall x, y : \mathbb{R})(\exists z : \mathbb{R})(x < z \wedge z < y)$

l) $(\forall x, y : \mathbb{R})(x > y \to (\exists z : \mathbb{R})(x < z \wedge z < y))$

m) $(\forall x, y : \mathbb{R})((\exists z : \mathbb{R})(x/y = z) \vee y = 0)$

Parte 4 – Relaciones de fuerza

Ejercicio 11

Dadas las proposiciones lógicas α y β, se dice que α es más fuerte que β si y solo si $\alpha \rightarrow \beta$ es una tautología. En este caso, también decimos que β es más débil que α. Determinar la relación de fuerza de los siguientes pares de fórmulas:

1. True, False
2. $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$
3. True, True
4. p, $(p \wedge q)$
5. False, False
6. p, $(p \vee q)$
7. p, q
8. p, $(p \rightarrow q)$

¿Cuál es la proposición más fuerte y cuál la más débil de las que aparecen en este ejercicio?

Ejercicio 12

Sea $x : \mathbb{Z}$, se tienen los siguientes predicados:

1. $P_1 \equiv \{(\exists k : \mathbb{Z})(2 \cdot k = x)\}$
2. $P_2 \equiv \{x = 2\}$
3. $P_3 \equiv \{(\exists k : \mathbb{Z})(2 \cdot k = x \vee 2 \cdot k + 1 = x)\}$

Indicar la relación de fuerza entre ellos. Justifique su respuesta en **cada** caso.

Ejercicio 13

Sea $c(a : \mathbb{Z})$ y el predicado auxiliar $esPrimo(i : \mathbb{Z})$, se tienen los siguientes predicados:

1. $P_1 \equiv \{(\exists i : \mathbb{Z})\,(0 \leq i < |a| \wedge esPrimo(a[i]))\}$
2. $P_2 \equiv \{(\forall i : \mathbb{Z})\,(0 \leq i < |a| \rightarrow esPrimo(a[i]))\}$
3. $P_3 \equiv \left\{\left(\sum_{i=0}^{|a|-1} \beta(esPrimo(a[i]))\right) = |a|\right\}$

Indicar la relación de fuerza entre ellos. Justifique su respuesta en **cada** caso.

Ejercicio 14

Sean $x, i : \mathbb{Z}$ y $c(a : \mathbb{Z})$, se tienen los siguientes predicados:

1. $P_1 \equiv \{(\forall i : \mathbb{Z})\,(1 \leq i < |a| \rightarrow a[i] \neq x) \wedge (a[0] = x)\}$
2. $P_2 \equiv \{(\forall i : \mathbb{Z})\,(1 \leq i < |a| \rightarrow a[i] \neq x) \vee (a[0] = x)\}$
3. $P_3 \equiv \{(\forall i, j : \mathbb{Z})\,(0 \leq i < j < |a| \rightarrow a[i] < a[j]) \wedge (a[0] = x)\}$

Indicar la relación de fuerza entre ellos. Justifique su respuesta en **cada** caso.

Ejercicio 15

Sean $x, i : \mathbb{Z}$ y $c(a : \mathbb{Z})$, se tienen los siguientes predicados:

1. $P_1 \equiv \{(\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |a| \land a[j] = x)\}$
2. $P_2 \equiv \{0 \leq i < |a| \land a[i] = x\}$
3. $P_3 \equiv \{(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |a| - 1 \to a[j] \neq x) \land a[|a| - 1] = x\}$

Indicar la relación de fuerza entre ellos. Justifique su respuesta en **cada** caso.