Ciencias sociales computacionales

Práctica 3 – Principio de inducción

Ejercicio 1

Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Ejercicio 2

Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

Ejercicio 3

(Suma de cuadrados y de cubos) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Ejercicio 4

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{-1}{4i^2-1} = \frac{n+1}{2n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i+1)\, 3^{i-1} = n\, 3^n$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i\, 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

Ejercicio 5

Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

a) $n < 2^n$

b) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

c) $3^n \geq n^3$

d) $\displaystyle n! \geq \frac{3^{n-1}}{2}$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Ejercicio 6

Probar que

a) $n! \geq 3^{n-1},\ \forall\, n \geq 5$

b) $3^n - 2^n > n^3,\ \forall\, n \geq 4$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5,\ \forall\, n \geq 3$

Ejercicio 7

a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$

b) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2 \cdot n \cdot a_n + 2^{n+1} \cdot n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n \cdot n!$

c) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + n(3 \cdot n + 1), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$